聖誕星星論

非負實數維度之座標系與度量衡之研究

どう夢及楊記綱

令和3年5月22日

It is the dream that you are
what you said you are

目錄

圖目錄

關於這版文件

此版本的文件為已刪減版，完整（草稿）版可至此觀看。其主要刪減掉的部份為僅處於想法的章節及偏向物理、萬物論（Theory of Everything）的相關章節。做此決定的原因是避免文件太過散亂無法聚焦重點。

Letter

老師好，

在開始研究前，考量到大部分的東西都是我自己在網路上看到有興趣才去研究的，因此可能遺漏一些較冷門的結果，所以先請老師過目研究大綱：

1. 建立一座標系統使得給定任何座標皆能找出它所代表、於碎形上的點
2. 透過上述所建立的座標系統，嘗試是否能以另種（非計算縮放相關比例）方式去計算/定義碎形的維度
3. 給定任意維度及其之單位度量衡，能否推出任意正實數維度之單位度量衡之樣態。

想做這專題的原因除了因為在研究物理（廣義相對論）時延伸到這後就栽進來了之外，學數學的時候對那種有些地方不能塞某些東西特別令我覺得不舒服。這也造就我喜歡把一些奇怪的數值塞進它不該在的位置，而這次就是嘗試把非整數的正實數塞進集合的次方的位置（$\mathbb{S}^n, n \in \mathbb{R}_0^+$）。那後來學到了這些非整數的次方能來表達碎形的維度，除了以它縮放後的比例這個觀點來看，我另外也覺得用「行動自由度」來描述這概念也很符合——像是 von Koch's Snowflake 你只能走特定的步數、轉特定的角度，不像在 $\mathbb{R}^2$ 你隨便走都會留在平面上。

不過這又延伸出了令個疑問：在拓普維度中，我們只要有單位長度，任意維度的單位度量衡我們都能夠輕易的將其建構出。像是：1×1 的正方形式 $\mathbb{R}^2$ 的單位度量衡（也可寫成 $\mathbb{R}^2$單位度量衡 $= [0,1]^2$）、$\mathbb{R}^3$ 則是 $[0,1]^3$ 依此類推。那就讓我想，那為什麼我們不能做出一個 $\log_3 4$ 維的單位度量衡呢？畢竟就我目前所看到的相關碎形維度解說都只講到如何計算出他們的維度而已。

對此報告的閱讀方式，首先先道歉基於它有點膨脹的太大，所以物理等無關數學的部份我有先移除了。然後就是原本也有一章是關於延伸數論的也都被先移除了（若有興趣可至此處的封存查看），因為考量到現在的主要目標要放在計算維度以及定義度量衡，而且個人認為若是給他人讀，一次加入過多元素會顯得混亂，也因為若這樣撰寫我會無法對單一主題聚焦（加上數論的部份還有很大的空白沒寫完），所以最終先決定以最少需要的元素將研究呈現計畫呈現給教授。

前導

0.1 摘要與研究目的

在學習中一直有個點很困擾我：「為什麼在存在維度的情況下，我們卻不能定義那些維度的度量衡呢？」所以我就以其為目標開始研究

給定任意維度[1]及其之單位度量衡，
能否推出任意維度之單位度量衡之樣態。

在整數拓普維度中，給定一單位長度後，即可建構出任意維度之單位度量（如：1×1 正方形、$1 \times 1 \times 1$ 正方體等）。因此我們認為應該有種方法（就如把單位長度以互相垂直的方式拼湊在一起即得各維之單位度量）能夠對不只拓普維度而是任意非負實數之維度，建構該維度的單位度量。

於是我們先從建立一個可以描述碎形的系統開始著手，我們嘗試做出一套適用於碎形上的座標系，最後在透過座標系中輸入（座標）與輸出（碎形上的點）間的關係，去計算碎性的維度。

[1]本研究中為求簡單一律採直線之維度，亦即我們的單位維度。

0.2 Regarding General Relativity

老實說，我不懂愛因斯坦的廣義相對論——如果你指的是他的那串算式。我懂，廣義相對論的簡略想法——重力是因為扭曲的時空、光是（嚮往路上衆多的示意圖一樣）只扭曲空間是不夠產生那麼强的重力的、時空的扭曲程度會因各式能量改變等等。但是對於 Einstein Field Equation 的部分，我完全無法了解，像是那些 Tensor（我理解到的是他基本上就是矩陣？）還有像是 Stress-Energy Tensor 中的 Stress 部分也是我非常無法理解的部分（在加上他的 Stress 還有沿時間方向的）。

0.3 Axiom on Prohibition upon Self-Referrencing

So today (R3/05/21) I've read upon articles regarding Hilbert and the issue of self-referrencing, and found out some similiar parts within my paper which basically states that the theory doesn't allow self-referrencing at the most fundamental (microscopic) level. Examples are:

- Prohibition on self-observing (at the most microscopic level, without complex structure)
- Any set couldn't just contain 1 element.

0.4 符號、表示法列表

- $\mathbb{A}$：操作環境
- $\mathbb{V}$：呈現（操作之結果的）環境
- $\mathbb{B}$：二分集
- $\mathfrak{c}$：任意連續之集合
- す：「數字」之維度
- $\mathfrak{u}$：單位——任意滿足 $\mathfrak{u}^n = \mathfrak{u}$ 之數
- $\mathbb{P}$：所以可能性之集合（通常指方向，一個降一維之集合）
- $\mathbb{O}$：物件
- $\mathbb{E}$：零維幾何，因為零維故應有唯一（或至少有限數量之）解

- $\mathcal{D}^n = (\text{れレ})^{\frac{n}{u}}$：n 維通用集之表示法[2]
- $\log_{\mathcal{D}} \mathbb{S} = Dim(\mathbb{S})$：集合 $\mathbb{S}$ 的維度
- $\mathbb{N}$：重新定義為「數字」之集合[3]
- $\lfloor \mathbb{S} \rfloor = \mathfrak{L}(\mathbb{S})$：重新定義為集合 $\mathbb{S}$ 中點的數量（捨去權重）[4]
- $\|\mathbb{S}\| = \mathfrak{Z}(\mathbb{S})$：重新定義為集合 $\mathbb{S}$ 的有效度量（捨去維度標注）
- $\tau = 2\pi$

0.5 公理：知者方存三分論

此公理在後面會詳細敘述，簡單講就是「任意物體的存在，是基於其他物體對他的觀測」。

0.6 已知問題

此理論可以明顯觀察出非常依賴 0 維與 1 維的架構。針對 0 維，我們認為它具有一定的獨特性（作為單一物體可建構之最小系統），不過對於 1 維我們會保持疑慮。理論中「行之分析」一章完全基於「針對任意移動都可寫成一個方向加上他的大小、長度」的假設（換句話說任意的移動都可以用一條直線的向量表示）。或許乍看之下沒什麼問題，加上大部分時候我們的數學都是從 1 維開始討論並延伸的。但考慮到我們已經允許了非整數維度，有種感覺會想讓我們假設，若 1 維並非最基礎且這樣可能讓我們忽略 0 維到 1 維間的維度中的運動？

[2] 這邊特地放了一個 u 在分母是因為雖然 $(\text{れレ})^x$ 即代表維度，但就如附錄 F.1 Debate over Number or Geometric Objects as Unit Dimension 所爭論的，れレ不一定代表一維。

[3] 自然數幾何則可（改）以 $\mathbb{Z}^+$ 示之

[4] 無條件捨去取 x 則可（改）以 $\lfloor x \rfloor$ 示之

第 I 部

數學

第 1 章　我らの世界：零靈擴展數論

1.1　れ與レ的起源

本理論的核心特點是我們定義了兩個新的數：れ（念「ㄌㄧㄥˊ」）與レ（念「ㄌㄟ[5]」）。其中れ在表幾何關係中定義為「於連續集合中兩相鄰點間的距離」。對於此數的原始推導過程以及為何此數對我們的理論如此重要，都留給物理的章節來解釋[6]，這邊我想先從較哲學的角度來介紹這兩個數。

非負數域　我們一開始選擇把 $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathbb{R}^+_0$ 當作我們最基礎的數域[7]，其中不選擇 $\mathbb{R}$ 是因為我們打算把正負當成一種標籤（attribute），也因為當拓展到 $\mathbb{R}^2$ 時正負就分別為 0 和 π 兩個方向所以一開始就把他們當作方向的註解似乎是個較好的選擇[8]。

完備性　對一個系統代表、對任何輸入，不論塞入任何數字，運算都應該要能給出一個結果。而為什麼這樣要求是因為對我們來說「宇宙」的定義是——所有東西。那從邏輯來想，一個包含所有東西的系統是無法出錯的，因為（舉例從電腦程式來想）任何指令，若無法執行則程序就得跳出。不過宇宙，依定義，是沒辦法跳出（fallback）到一個上一層程序（Parent Process）的。所以得，若宇宙是由一群程序依序執行所構成的，那那些指令不論你塞什麼數字，都要能給得出答案。也就是像是 $\frac{1}{0}$、$\sqrt{-1}$ 等值皆必須被定義。

れ　是我們定義的「不太等於」0 的數，那為什麼要新做一個數，除了避免人們在看到 0 時直覺的應用相關的邏輯（像 $れ \times れ$ 不完全等於れ[9]），也是因為我們打算賦予它一些特殊的意義：

- 當用在描述物體時，表「自己」
- 當描述物體間關係，表「隔壁」

---

[5] ㄟ的發音為ㄝㄧ，所以羅馬拼音會是 Lei。

[6] 網路上也有舊版的解釋 [1, P. 2]

[7] 注意，是「選擇」，所以當然我們也有嘗試去討論有沒有比 $\mathbb{R}^+$ 更基礎的 Building Block，不過為了簡單就先這樣吧。延伸閱讀：附錄 A 汲取資訊

[8] 簡短講也可以說是我們把「數」拆成大小與方向兩個元件，而正負被歸類到的是方向一類（見 2.3 值籤）。

[9] れ的次方式用來表維度、方向的，後面會解釋到。

{dfn:workspace}

定義 1.1 (工作數域). （加上 れ 後得）工作數域 $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{+} \cup \{\text{れ}^{n} \mid n \in \mathbb{R}\}$[10]

{dfn:inftyVonPerspecti

定義 1.2 (無限僅出自視角). 源自於我們仍舊（跟大部分的數學系統一樣）把 ∞ 當作是一個概念而非一個數。也就是任意描述「物體本身」的函數都不會有 ∞ 這樣的一個值。不過這不影響外部觀察者「看到」無限大，因為可以靠分數的分母值設成 れ。

另外這樣的架構也可將「值」一維度同化成跟其他所有維度相同的「轉向（*Orientation*）」性質——皆為環，且中心點表自我。

1.1.1　定義

在介紹れ與レ相關之定義前，我們先介紹一個我們所用的簡易表示法：

$$\vec{x}y = \prod_{i=1}^{n} x_i y^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot y \qquad (1)$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

{eq:vecExpansion}

那現在可以開始來正式介紹れ的令一個夥伴——レ。レ的定義為「存在於所有可觸及空間之外的點」。而れ與レ有兩個關鍵關係式如下：

{dfn:punkt}

定義 2.1 (點). れ^{n} 代表一可向 n 個方向[11]延伸的點

定義 2.2 (連續維度). n 維的物件以

$$(\text{れレ})^{n} = \mathcal{D}^{n}$$

表示。注意這邊代表的是 n 維的「物體」，而不是用 n 維座標表示的點——前者會有佔域，後者僅有權重。

{eq:rR}

定義 2.3 (無視之維度). 若要表示一個非原點的點，我們須透過先建構一個物體後再把它的佔域無視掉（使其降維成一個點），如下所示：

$$\text{れ}^{2}\text{レ} = \mathfrak{u} = (\text{れ}^{2}\text{レ})^{n}$$

其中這算式是從下列的表示法簡化而來的：

$$\vec{x}\,(\text{れレ})^{n} \cdot \text{れ}^{n} = \vec{x}\,(\text{れ}^{2}\text{レ})^{n} = \vec{x}\,\text{れ}^{2}\text{レ}$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

而直譯這算式就是將一個 $\vec{x}$ 之物體降維成一個點，所以它代表的是一個位移。所以 $(1,2)$ れ^{2}レ $+ \mathbb{O}$ 即代表將起始點從原點移至 $(1,2)$ 後建構物件 $\mathbb{O}$（當然 れ^{2}レ 也代表度量，所以這邊後面會加上一個完整的物體來區分它代表的是位移還是度量；而其次方能省略是因為能從給予的座標去推斷）。

{eq:rRr}

[10] 其中レ用 れ^{-2} 表示

[11] 至於詳細 n 個方向的定義，我們目前來沒想到。不過應該會盡量避免用像直角相交等敘述定義。

1.1.2　半眞實圖層

{sec:subUniv}

對於 レ $\cdot n$ 及 れ $\cdot n$ 於算式中（即實體上）是不能分別被當成レ與れ的，不過在特定的觀測情況下（取到非物體之維度的度量）仍可能給出レ或れ。

詳細可見 3.2.4 降維觀測等範例。

1.2　世界建構公理

{sec:szk}

世界建構公理(世界を築く公理;Postulate on Universe Construction)，是一個針對我們理論中所有系統、集合的一個公理。

{axm:minStruct}

公理 1 (最小架構：零與靈). 任意世界皆須包含 れ（零）與 レ（靈）。其中

1. れ 表「自己」
2. レ 為彼方之點，從任一點朝任意方向行走皆（終究[12]）會抵達。

{axm:ring}

公理 2 (環架構). 任意從 れ 出發的路徑皆（終究）會通過 レ 並繞回 れ。

1.3　物

{sec:mono}

首先我們寫理論時的論點是「假設所有可能性、假設最糟最複雜的狀況，除非有很好的理由限制那些條件。」所以針對維度的部份我們採宇宙本身是無限維度的，畢竟目前也沒一個好理由為什麼我們的宇宙要是三或四維[13]。而這些我們所看到的三維、四維（可自由移動之空間），只是因為其他維度都被降維（幅域縮至れ）了。

「物」是我們理論的最基礎元件，它只佔域一個點（所以不是什麼複合的複雜機械）。而其會生活在他的宇宙，其中設該空間之維度維 n。而每個物件都會有它自身的「值」。（可以想成，物就像一個點 x，而我們所說的值就是指 $f(x)$）那那值是什麼呢？它為什麼存在？在理論演變到現在，我們發現了一個它可能的出處。

還記得無限維度的公理嗎？那所有未使用（無限多的）被壓縮到只剩 $\{self,$ レ $\}$ 的維度，剛好可以依次表二進位的各位數。

（研究：18 物之二進位表示法）

[12]本文所用的「終究」皆代表幾何上他們確實是在條一條線（路徑）上，不過並不代表能夠透過位移抵達（就算給予無限的時間）。詳見定義 1.2 無限僅出自視角

[13]Originally the idea started at [2, P. 3] as we stated: *"All dimensions (parameters) are equal"* which also aimed to resolve why we should have a 4-D universe or so, by saying that "No, we're not restricted to 4-Dimensions. Anything that we sense/preceive can be treated as a dimension, the same as how we treat space."

第 3 章 レれ數論：建構物件

3.1 把幾何物件當作一種數字

{sec:GeoObjasNum}

在數學中我們往往把數字當作是一種 Abstract Representation，所以往往我們是用數字來表示物體的一些性質（像是位置、體積等），也就是說數字 2 可同時表示長度為 2 的線段、面積為 2 的任意物體等等。不過與其把數當成 Abstract Representation，在此我們想做點另類的嘗試：想辦法把幾何物件當作一種數字。（其中為何做這決定以及若非如此理論將如何發展將放於附錄 F.1）

3.1.1 註譯「度量衡」（積分）

在學習 Hausdorff-Dimension 時最常聽到對某個碎形會有某個 n 維度的測量，不過從來沒有人去註明那是什麼。時常得到的解釋就是在知道一物件是什麼維度後，再用那個物件去定義該維度的單位度量衡。不過如果從整數維度來看的話，很明顯不該如此啊。在幾何中我們只要定義了單位長度後，我們就能畫出任意（整數）維度的單位度量衡了（例如用單位長度線段拼成一個正方形即得單位面積）。那從整數維度推廣到非負實數維度時，不應該也代表我們只需要有一個單位長度，就能定義出任意維度的單位度量衡了嗎？於是我們便開始著手如何定義此物。

於是我們先回到傳統的自然數拓撲維度，去思考那些維度的測量究竟代表什麼意思？這邊我們把我們的測量量叫做佔域（Span, 以 $\|\mathbb{S}\|$ 表示），亦即若用一集合表示一物體，則佔域即為其所佔的空間（乘上每個點的權重エ $\cdot f(x)$[14]）。

那要計算所佔空間就等於把集合中的每個點加起來，於是我們採用了積分。一維物體 $\mathbb{S} = [a, b]$ 之佔域即為其長度[15]也就是 $\|\mathbb{S}\| = \int_a^b 1\, dx$；二維物體之佔域則為其面積亦即 $\|\mathbb{S}\| = \iint_{(x,y)\in\mathbb{S}} 1\, dxdy$。

[14] 權重在這章節都將被當成 1，不過在未來第 4 行之分析章時將會非常重要。

[15] 此處假設空間為 Flat Space, aka 權重恆等於 1。

觀察一下規律我們可以推測，推廣到任意維度之佔域可被定義成[16]：

$$\|\mathbb{S}\|_n = \int \text{エ}\,(x)(dx)^n \tag{8}$$ {eq:norm}

其中 $\|\mathbb{S}\|_n$ 代表對集合 $\mathbb{S}$ 以 n 維之測量法測之；エ (x) 為權重，於此因為 Flat Space 故恆等於 1；另外 dx^n 可替換成 れ^n（此理論中 n 維點的表示法）。[17]

而對此算法亦可得知在討論碎形維度時，為何用大於物體之維度之測量法測量物體時會得到 0，因為你過度降維了（乘了過多的 れ）；反之對用小於物體維度之測量法測之亦因乘不夠多れ故無法將其降維至數字。

3.1.2　從度量衡推導如何表示幾何物件

設一幾何物件其所有的點為一集合 $\mathbb{O}$，若該物為 n 維之物件則

$$\mathbb{O} = (parameters)(\text{れレ})^n \tag{9}$$ {eq:defO}

其主要概念為 $(\text{れレ})^n$ 類似於一個 attribute 用於標示該物件的維度，註解 $\text{れ}^n \cdot \text{レ}^n$ 的方式為：「將一個 n 維的點 れ^n 沿著 n 維個方向 レ^n 拉展成一個物體（隨後再由 parameters 去將其塑造成它該有的形體）」。

3.1.3　度量與幾何物體的差異

那透過前面兩節我們很明顯的了解此理論並不把物體的測量跟物體當作同樣東西，那他們詳細有什麼差別呢？簡單的想法就是算式 (9) 所描述的就好像我們平常會說的「2x2x2 的正方體」之類的；而度量則像我們所說的「體積為 8 的物體」，那他有可能是 $2 \times 2 \times 2$ 也可能是 $1 \times 2 \times 4$ 等。而我們做出這樣的區分之用意就是希望在未來的章節，我們也能對這些物體去直接運算，像是 $\mathbb{O} + \delta$ 就代表把整個物體 $\mathbb{O}$ 位移 δ，或更甚我們能透過運算得到像是物體截面切片的集合、表示物體表面的集合等等。

3.2　把集合當作一種數字

{sec:setAsNum}

3.2.1　利用度量衡反向推導集合建構法

{ssec:defSetAsNum}

在前面的章節我們了解到了如何對任意維度的物體取得其度量。不過我們仍舊不知道 $\mathbb{S}$ 到底是什麼東西？不過照定義如果積分一個 n 維物體 n 次可得其度量，那微分 n 次其之度量應該能得到原本的東西。而在我們理論的

[16] 此處因章節先後排序之緣故，先用積分定義度量衡。後面於把集合當作一種數字一章將介紹正確度量衡之算法 3.2.4 降維觀測

[17] 為避免不必要的混淆，在此先假設均採用正交座標系並省略 Jacobian Determinant

數論中，因為新增的數，將積分改寫成無限多極小物件乘上其權重的總和會比較方便運算。

$$れ^n \cdot \frac{full\ span}{(seperation)^{\lfloor \mathbb{P} \rfloor}} \cdot \mathcal{W} \cdot エ, sep \leq span \tag{10}$$ {eq:structSet}

其中 $れ^n$ 表點（所處空間）的維度；分子放總幅域（當取度量時會剩下的部份）；分母放兩點間的間距[18]的 $\lfloor \mathbb{P} \rfloor$ 次方[19]；$\mathcal{W}$ 是類似積分中的 Jacobian，用於修正每塊區域不等大的問題的（也用於區分座標系型態）。

範例：建構連續一維集 $[-\alpha, \alpha]$　，首先我們知道總幅域為 $\alpha - (-\alpha) = 2\alpha$，另外因為為連續集依定義間隔為れ，最後它總共延伸的方向為 $\lfloor \mathbb{B} \rfloor = 2$，得：

$$れ \cdot \frac{2\alpha}{れ^{\lfloor \mathbb{B} \rfloor}} = れ \cdot \frac{2\alpha}{れ^2} = 2\alpha \cdot れレ \tag{11}$$

驗證對集合的操作：

$$(2\alpha \cdot れレ) \cdot れ = 2\alpha れ^2 レ = 2\alpha \tag{12}$$

3.2.2　延伸方向數爲次方

還記得算式 (10) 中有個 $\lfloor \mathbb{P} \rfloor$ 次方嗎？要說它怎麼來，老實說就是湊出來的，或者技術上該說是基於 D.1 雙向延伸猜想以及 3.1 把幾何物件當作一種數字中不把幾何物件當成數的結果。

從定義來看　這些算式意外完美的串在一起。從雙向延伸猜想開始，把它當作定義 2.1 點中所說的延伸方向數剛好得到レ，並恰巧符合 2.2 連續維度與 9 從度量衡推導如何表示幾何物件中維度的定義。不過既然如此完美，我們就暫且當他是對的吧（就像 Dirac's Equation 一樣）。

不只如此，這樣的設置除了上述精美的扣題外，它還留了其他禮物給我們。

從物理（幾何）來看　他的定義代表了任意的延伸，都須向兩個（全部）方向等量的延伸。所以原點便會是他的重心（此論述未證），而這剛好符合了原點是 $self$、れ的設定（在不引入位移的情況下）。

---

[18]這邊的算式是表示簡單集合（定義 3.1 簡單集合，所以任兩點之間距皆相等。

[19]其實整個算式我們只測試過一維的情況（n=1），理論上 $\lfloor \mathbb{P} \rfloor$ 因該會跟 n 連動，而當 $n = 1 \Rightarrow \lfloor \mathbb{P} \rfloor = 2$

3.2.3 座標權重 $\mathcal{W}$

{ssec:defW}

在 Jacobian 可套用的情況下，可直接當作 $\mathcal{W} = |J|$。但基於我們所允許之座標系可能性（見），很有可能無法照定義建構 Jacobian Matrix，故須在 Jacobian 無定義的區塊定義 $\mathcal{W}$。

另外我們也希望這係數可幫助我們（唯一的）辨別給予的座標所使用座標系。如給兩物：

$$(1,1,1) \cdot (れレ)^3 \cdot 1 = 1 \times 1 \times 1 \text{ 的正方形} \tag{13a}$$

$$(1,2\pi,\pi) \cdot (れレ)^3 \cdot (r^2 \sin\phi) = \text{半徑為 1 的球形} \tag{13b}$$

（延伸研究於：另立於 B 辨別座標系）

3.2.4 降維觀測

{ssec:deDimObserv}

因為觀測的特性，觀測所得必為連續的空間[20]。所以在降維時我們將使用連續集合來示範[21]， 而（一維）連續集合套用定義滿足：

$$\text{（幅域）エれレ} \tag{14}$$

{eq:ContSet}

其中在將幅域壓為零（れ）時，可達到降維之作用[22]；幅域為其他數時（包含レ）則為一般之連續集。

這其中的概念可想成，對任意維度（的軸，像是 x 軸、y 軸等）可以把他想成一個環（定理 2 環架構）。當幅域為有限時還可滿足像是角度等模運算之數系；當它為無限長時則等同於直線；而當幅域為れ時，表示該軸不具可移動空間[23]，也就達到降維（將該維度廢除其功能）的作用了。

不過注意一定要是一個維度 (れレ) 才能搭配れ去做降維。所以像是對實數集 $\mathbb{R} = レ\ (れレ)$ 不能對它降 3 維 $\|\mathbb{R}\|_3 = れ^3 \cdot \mathbb{R} \neq (れ^2 レ)^2$

[20] 若透過物體移動來觀測（像是光的反射），則其因為（依定義）穿越非連續空間耗時為 0，故無法去觀測（區分）出非連續的空間。

[21] 就算非連續集合也可以運作，不過像是 $\mathbb{Z}$ 等每個點皆是獨立的集合，維度會是無限大。至於其他的混何類也不會多簡單處理。

[22] 得 $れ^2 レ$，其中幅域 $= れ$ 表示除了自己還存在一個點，而根據定理 1 最小架構：零與靈該點為レ

[23] 注意：這邊得れ代表總幅域，亦即整個幅域只容的下自己（self）一個物體，與倆物體間距離れ表兩相鄰不同。

3.2.5 關於集合性質

對於集合我們可以依上面的定義再將集合區分成三種類別：基礎集合、簡單集合及複合集合。他們的定義如下：

{set:simple}

定義 3.1 (簡單集合)**.** 為任兩點間距離均相等的集合。(例如：所有連續集、整數集等)

{set:building}

定義 3.2 (基礎集合)**.** 為簡單集合中最小之片段，若將基礎集合連續拼湊在一起至無限，即得簡單集合。舉例來說對集合 $\mathbb{S}=\bigcup_{x\in\mathbb{Z}}\{10x,10x+1,10x+2,10x+5,10x+7\}$，不斷重複的架構 $\{10x,10x+1,10x+2,10x+5,10x+7\}$（間隔依序為 $1,1,3,2,3$ 反覆循環）即為他的基礎集合

{set:complex}

定義 3.3 (複合集合)**.** 乃非任意地方皆連續但存在片段區域為連續之集合，可透過拼奏各式簡單集合得之。(例如：斑馬集 $\bigcup_{x\in\mathbb{Z}}[2x,2x+1]$、*Cantor Set* 等)

其中簡單集合中，非連續集合之維度不等於連續集合之維度。

3.3 介紹、定義（特殊）維度

（廣義延伸：8 什麼是維度）

對於維度的註解有很多種，像在碎形中廣泛的定義為縮放時增減的次方數。那在本理論中，我們所選擇對維度的註釋則為「自由度（*Degree of Freedom*）」。

3.3.1 零維

零維屬於絶對標準，定義為「不具任何可變（動）性的空間」，亦即零維（以 $\mathbb{E}$ 示）僅可能為 { 自己, ¬自己 }（亦即二分集 $\mathbb{B}$）。另外也可把零維當成把所有維度降維的産物。

參見：3.2.4 降維觀測

第 4 章　行之分析

{cpt:dynAna}

4.1　筆座標系ヒ的基本要件

筆座標系為一跨維度座標系統（Trans-Dimensional Koordinatensystem），透過建構合適之エ場，可將任意座標 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 映射至維度 $\leq n$ 之空間中的點。

對一座標系以 $f : \mathbb{A} \xrightarrow{エ} \mathbb{V}$ 表示，並給定座標 $s \in \mathbb{A}$，則其所代表的點之位置 $d \in \mathbb{V}$，滿足：

定義 4.1 (覆蓋性)**.** $\mathbb{A}$ 須可完整包含 $\mathbb{V}$（$Dim(\mathbb{V}) \geq Dim(\mathbb{A})$）。

定義 4.2 (移動方式)**.** 設一路徑 $x(t), t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$：

1. 起始位置由座標系定義；
2. 給定之座標 s 定義該路徑之起始速度[24]；
3. 路徑中每瞬間之加速度則由該瞬間所在處之位置決定——見算式 (16d)——通則為朝 エ 值高處加速；
4. 具一定中止條件，用來決定點 d 具有一定的判別方式（尚未確認為何）。

{exDef:close}

擴充定義 4.3 (雙向封閉性)**.** 對任一起始速度 $\vec{v} \in \mathbb{A}$ 皆必代表一點 $d \in \mathbb{V}$；任意點 $d \in \mathbb{V}$ 也至少具有一個 $\vec{v} \in \mathbb{A}$ 代表他。

{dfn:gleichePhad}

擴充定義 4.4 (無外力系統)**.** 基於後面 *4.2.2* 方向的偏轉之定義，路徑中的轉向並非由外力影響造成的。故對一系統，座標之值的大小不應改變其行進的路徑（只應影響其行走距離，亦即中止條件）。

其中後兩點被叫做「擴充」定義的原因是：

- 針對擴充定義 4.3 雙向封閉性，其主要用途為使 $\mathbb{V} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{A}$ 成立，故不只須每一個起點皆須有一個終點，更要每個終點至少有一個起點。
- 針對擴充定義 4.4 無外力系統，其主要用途只是為吻合我們對座標系的普遍認知。

[24] 不一定需要 $\frac{d}{dt}x(t) = s$，也可能設成 $\frac{d}{dt}x(t) = \hat{s}$ 等。

4.2 定義工場與其對路徑之影響

{sec:eFundPath}

4.2.1 速率的改變（一維算式）

現在為您介紹我們理論的最後一個(新創的)核心元件:場集合(Set=Field)。場集合顧名思義就是一個集合在外加一個場。其主要表示方法為 $\mathbb{S}\cdot$ エ，其中 $\mathbb{S}$ 為集合而エ為建構於該集合上的場。當然直接想會很奇怪，為什麼集合要乘上一個場呢？更何況場エ本身也是一個函數。這是因為要用前面我們於 3.2.1 所介紹的方式來描述集合，這時候後面所乘上的エ就等同於於該章節（為了方便）全部假設成 1 的 attribute 了。

那如果給定一個場集合 エ（此處若集合為全域則省略不寫)，把它當成一個舞台，那物件會在上面如何運動呢？這就是函數 エ (x) 的功用了。首先我們要先定義一下物體的運動速度代表什麼？

定義 5.1 (速率定義)**.** 給定速率 v 代表於單位時間內行經了 v 個單位[25]的空子。

而空子是什麼呢？（老實說因為這裡論其實是另一個物理理論的延伸物，所以這邊就先略過空子的推導）依定義：

定義 5.2 (空子場)**.** エ (x) 即代表在點 $\vec{x}$ 的空子數量（或準確來講密度)。

依此可開始推理：定義物體的視角恆等於 basis 的視角（$=1$)，而其所受的物理現象則須[26]遵循所處之該點的區域エ值管理。套用進轉換式 [1] 得：

$$ム_\alpha = \frac{コ_\beta}{\frac{エ_b(\alpha)}{エ_b(\beta)}} \quad (15a)$$ {eq:convert}

$$コ, \beta 為空子（物理）相關之視角 \quad (15b)$$

$$ム, \alpha 為物體所見之視角 \quad (15c)$$

依照這些設定，得以推出：

$$\frac{d}{dt}コ = v \quad (16a)$$ {eq:velDef}

$$\alpha = 1 \quad (16b)$$ {eq:constObvUL}

$$エ\,(t) = エ_b(\beta), \beta = ム\,(t) \quad (16c)$$ {eq:localUL}

---

[25] 單位隨意，因為場的單位亦可隨意縮放

[26] 將一單位長度設為定值可避免過度複雜化，同時我們也認為若兩者之單位長度接在變化的話，可能有重複之虞。

$$\frac{d}{dt}\text{ム}\,(t) = \frac{d}{dt}\text{コ}\,(t) \cdot \text{エ}\,(t) = v \cdot \text{エ}\,(\text{ム}\,(t)) \tag{16d}$$ {eq:dyn}

{eq:deriveMotion}

當然上面的式子都是非常直覺的推導出來的，而他的結果也有一個很直白的註解，不過針對座標系仍有一個條件需要達成定義 4.4 無外力系統 而這規則其實也就簡單的在說，我們那些因為エ場扭曲的直線其實也是直線（aka 他的轉彎不是因為外力影響[27]），所以初速的快慢只應該影響它抵達一個點的時間，而部會導致它行走不同的路徑。

4.2.2 方向的偏轉

{ssec:dirChange}

上述的算式簡單的敘述了一維的情況，現在來推演看看對更高維度時該如何運作，畢竟明顯的不能就將算式複製一次然後分別套用在 x, y 軸方向後再加總。因為已知在二維中路徑會被彎曲[28]，但若直接將算式做兩次是製造不出路徑偏移的。

我們覺得上述算式不能描述高維中的運動是因為我們是從一維去推的，而一維除了行進方向外沒其他東西可以偏轉了。那針對偏轉的規則，若要能符合我們對直角座標、極座標等的認知，那我們得出的定義為：

定義 6.1 (偏轉守則). 對任意點 x 及其瞬時速度 $\vec{v}$ 滿足在鄰近區域中，沿 $\hat{v}$ 方向之各切片皆有等量之空子。

在二維平面上舉例，寫成算式就是：

$$\begin{gathered}\text{Let the current position is at origin,}\\ \text{and instant acceleration } \vec{a} \text{ be the x-Axis, satisfied:}\\ \lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} \text{エ}\,(re^{i\theta})d\theta = \lim_{r\to 0}\int_{-\pi}^{0} \text{エ}\,(re^{i\theta})d\theta\end{gathered} \tag{17}$$ {eq:turn}

[27] I think this signals why tensor is preferred over dynamic acceleration?

[28]

第 II 部

次元

我們所住的地方

第 8 章　什麼是維度

維度乃 *"Degree of Freedom"*

{sec:defDim}

拉回主題，在定義度量衡前，想必我們得先定義何謂維度及其計算方式。當然如果能直接使用 Hausdorff 對維度的定義，那是最棒的。不過在考慮到用 Box-Counting 等不同方式會對同個物體得出不同得碎形維度後，我們還是自己做個維度的定義好了。

8.1　維度是可以移動的自由度

給定一空間 $\mathbb{V}$ 用 n 維座標 $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示，亦即：

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{S}_i = \mathbb{V},\ x_i \in \mathbb{S}_i,\ \log_{\mathcal{D}} \mathbb{S}_i \leq 1 \tag{35}$$ {eq:defSet}

而依算式 (35) 的定義可知：

$$Dim(\mathbb{V}) = \sum_{i=1}^{n} Dim(\mathbb{S}_i) \tag{36}$$ {eq:defSetDim}

而所謂「維度乃移動之自由度」代表

定義 7.1 (移動自由度). [29]$Dim(\mathbb{S}_i) = Dim(\mathbb{S}_j) = 1 \overset{\text{若且唯若}}{\Longleftrightarrow}$ 在變動座標 x_i 時不必變動其他任意座標 $x_j,\ j \neq i$ 來滿足 $\vec{x} \in \mathbb{V}$

8.1.1　速度射線版

{ssec:unitVecRay}

令也可用移動速度的向量之延伸來計算，下為二維的範例：

$$Dim(\mathbb{V}) = \int_0^{2\pi} Dim(\{r\hat{v} \mid r \in \mathbb{R}_0^+, \hat{v} = e^{i\theta}\} \cap \mathbb{V}) d\theta \tag{37}$$

簡單來講就是就每個單位向量之延伸射線與 $\mathbb{V}$ 所交之點的維度的總和（不過基於方向是一個連續的參數，我們採用積分）

（至於有關 $Dim(\mathbb{S})$ 詳細意義，參見下章節 8.2 維度乃複雜度）

[29] 此敘述未經驗證！

8.2　維度乃複雜度

{ssec:dimAsComplexity}

在 Cardinality 一課中我們學過 $Card(\mathbb{R}) = Card([0,1])$，而 Cardinality 所表示的意義是一個集合中物件的數目，恰巧我們理論中的 $\|\mathbb{S}\|_0$ 也代表集合中物件的數目[30]。那也把這概念加進來並延伸，我們可以推測縮放並不會影響物體/集合的維度。

8.2.1　延伸定義至無限集合

那基於對 Cardinality 的延伸，我們會說維度的定義不會因為其縮放而改變（僅限於幅域無限之集合？）。舉例來講 $Dim(\{n \mid n \in \mathbb{Z}\}) = Dim(\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\})$。

那對一個集合，去除間隔大小這樣的要件後，剩下對無限集合的區別元件就只剩區域的複雜度了。也就是一集合之基礎集合的複雜度。而集合的複雜度可以想成它需要用多少簡單集合堆疊而成、或是他有幾種不同的間隔大小。（類似對波可以用傅立葉轉換得出幾種不同的 Sine Wave。）

（注意：這邊不代表連續集合的維度會等於等間隔之集合的維度）

8.3　維度差猜想

繞了一大圈，擴充了數論又建構了新的座標系，歡迎回到我們的起始點：該怎麼計算一個物體的維度？而這就是為什麼上一節我們要費盡心思的去發展如何用一高維座標去表示任何維度比他低之物體中的點，因為我們希望能從這系統中座標與其映射的點間的關係來計算高維座標與物體間的維度差 $\delta = Dim(\mathbb{A}) - Dim(\mathbb{V})$。而我們得到的結論是：

{thm:dimRelation}

定理 4 (維度關係)**.** 對任意 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{V}$，滿足兩集合中任意的一點皆有一箭頭指向它（從它指向他人），則 $\mathbb{V} \times \mathbb{P} = \mathbb{A}$

其中 $\mathbb{P}$ 的定義我們是採用如下（適用於 $Dim(\mathbb{V}) < Dim(\mathbb{A})$）代表所有表示 $\vec{x} \in \mathbb{V}$ 的座標：

$$\mathbb{P}_{\vec{x}} = \{\vec{v} \mid \vec{v} \overset{\text{工}}{\mapsto} \vec{x}\} \tag{38}$$

而對這定理的解釋是：對所有在 $\mathbb{V}$ 上的點，都存在 $\|\mathbb{P}\|$ 個在 $\mathbb{A}$ 上的點可以表示其。若此為真，也就表示全部取維度（亦即全部取 $\log_{\mathcal{D}}$）：

$$\log_{\mathcal{D}} \mathbb{P} + \log_{\mathcal{D}} \mathbb{V} = \log_{\mathcal{D}} \mathbb{A} \tag{39}$$ {eq:calcDim}

（如果每個 $\mathbb{P}$ 的維度皆相等），就此我們就能透過將物體放入一個比它高維的空間來計算他們倆之間的維度差 $\delta = Dim(\mathbb{P})$。

[30] 這邊集合的 norm 定義於被刪除的章節，不過不影響就記得 norm 底線 0 代表點的數量，所以像是 $\|\text{Continuous Set}\|_0$ 為無限多

第9章　探討維度

9.1　移動

我們的理論看下來應該能明顯的感受到對「區域性資訊」的重視，所以想當然要分析維度也須靠實際走訪來分析。會想用這方法的原因也是因為從碎形與拓普維度的差異來看，對一般圖形滿足：

$$\begin{gathered}\forall A, B \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}^+, A, B \text{ isn't described by } \infty \\ \exists\, \overline{AB} \text{ that is finite}\end{gathered} \tag{40}$$

不過這並不適用於非整數維度的碎形，他們的移動距離大多數情況下須被降維以得到一個有限（有意義）的數值。畢竟對任何 Hausdorff-Dimension> 1 的碎形，依碎形的無限循環的定義，任兩點間的距離都是無限大[31]。而我們猜想或許能透過他需降維的次數來推斷他與兩整數拓普維度間的差距，進而推出其真實維度。這也就把我們帶到 β 偏移螺旋猜想。

9.1.1　β 螺旋猜想

所謂的 β-Offset Helix 是我們對是我們針對維度與位移的關聯性的猜想，簡單來講我們認為維度與降維次數存在著一個環的屬性：

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n : \|\overline{AB}\|_{(n \bmod u)} \text{ is finite} \tag{41}$$ {eq:dimRing}

而另外從我們所觀察到的，我們猜測 $u = 1$。

也就是對能被 $\mathbb{R}^1$ 包含的碎形（像是 Cantor Set），則 $\|\overline{AB}\|_{(n)}$ is finite；對能被 $\mathbb{R}^2$ 包含的碎形（像是 Koch Snowflake），則 $\|\overline{AB}\|_{(n-1)}$ is finite。

9.1.2　Movement within Fractals

那我們要怎麼去描述 $\overline{AB}$ 呢？參考圖的コ → ム部份，

因為コ本身的用意是收斂（降維）至碎形的空間，所以對 A, B 兩點我們可以討論的資訊有：

$$\overline{AB}_{ム} \text{為兩點在碎形中相連的（最短路徑）} \tag{42a}$$ {eq:info:ABmu}

[31] 這裡所說的距離須滿足其所畫之路徑中的每個點皆於碎形上。

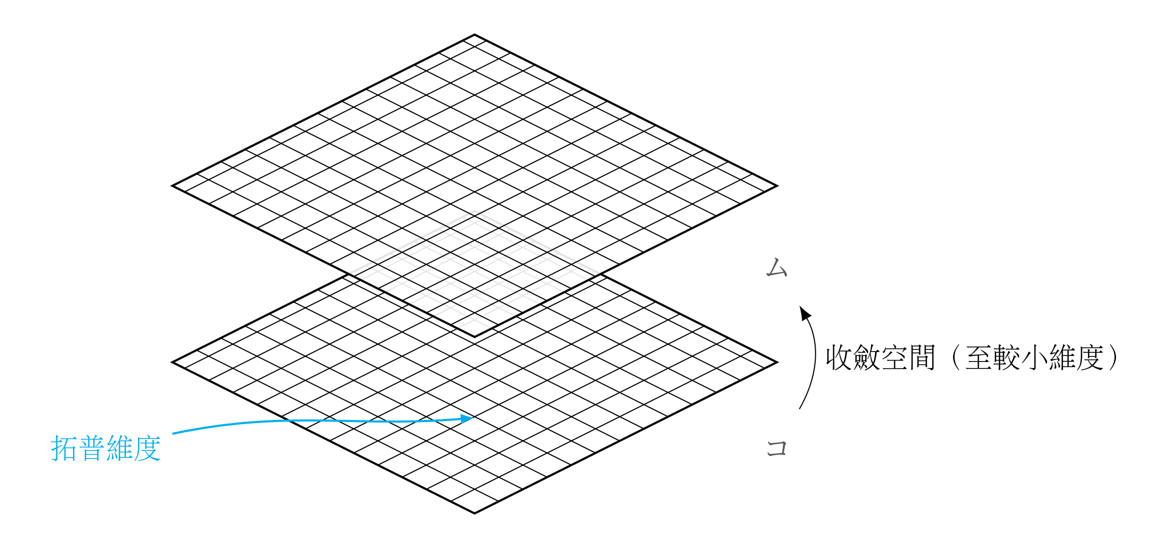


圖 9.1: コ → ム圖層節錄（1224 系統） {1224:ko=mu}

$$\mathbb{P} = \text{於コ中所有收斂後為}\overline{AB}_{ム}\text{的路徑之集合} \tag{42b}$$ {eq:info:collectPathKo}

$$P = \mathbb{P}\ \text{中度量最小者} \tag{42c}$$ {eq:into:minPathKo}

{eqs:info}

那首先我們猜測：

$$\|P\| = \|\overline{AB}\| \tag{43}$$ {eq:measureAB}

而我們知道 P 的維度為線段，只要能找到 $\overline{AB}$ 的表示法即可。

$$\|P\| = \int_{x\in P} {}_{フ}\underset{\rightarrow}{\text{エ}}{}_{コ}\, dx \text{ is finite} \tag{44}$$

而根據定義若以 コ → ム 的エ場當權中積分即為 $\|P\|$ 且為有限（前提是 ${}_{フ}\underset{\rightarrow}{\text{エ}}{}_{コ} = 1$）

$$\int_A^B \text{エ}\,(x)dx = \|P\| \tag{45}$$

9.1.3　從 ACC 指令座標系分析

雖然 ACC 的詳細章節因為一些因素（系統的限制性過高）被移除了，不過它還是留了一個可能的討論方式給我們。若給定一移動方向 $\hat{v}$，並將該路徑（直線）與碎形的空間 $\mathbb{V}$ 的交點蒐集成一個集合，或許可通過這樣分析該集合的維度。

Similiar to 8.1.1 速度射線版

第10章 The Space

This chapter introduces how our definition shapes the movement within space that isn't fully continuous.

10.1 Innenraum

Innenraum refers to the chunks of fully continous spaces within a non-fully-continous set.

Which implies that whenever you're traveling within the same Innenraum, you could always find a route that could bring you to the destination without exiting **the** Innenraum.

10.2 Ausserraum und Verbundenraum

For any two non-infinitly span Innenraum/Space (hence having borders that connect to Le-point) —— $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ —— we could connect them (of course, through Le-point) by $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2$[32].

The figure 10.1 represents the space $S = S_1 - S_2$. As noted in 1.2 世界建構公理 all space must be enclosed (bordered) by レ-point, and considering all レ-points are **the same** レ-point[33], two space are therefore connected (through レ-point) as what we defined.

10.2.1 Movements

All components (by def) have their own underlying dynamic system. Though sometimes seems to be extra, it's actually considered critical to provide spaces that when object travels they sense (a fake) acceleration

[32] And since we denote the bar sign as connecting spaces, set subtraction should only use the setminus $\setminus$ symbol.

[33] The description of how all レ-points are the same レ-point has been written in past document, but I haven't have time to dig that out so just take it as fact for now.

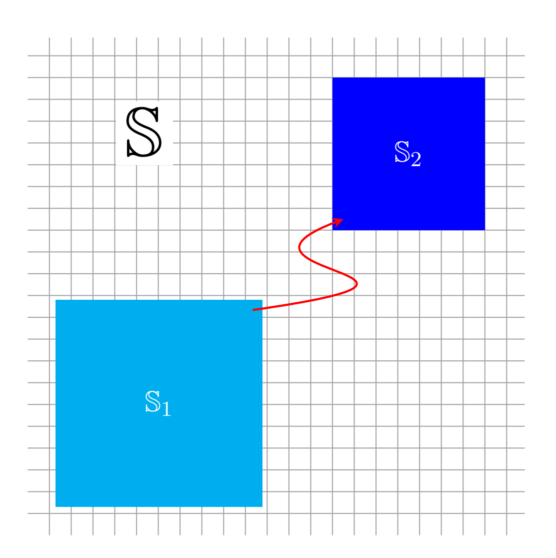


圖 10.1: $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2$ {fig:S-1-2}

(some notable cases will be like gravity). But the term **"All components"** also includes the bar symbol $-$ that represents the connection of two spaces.

But the type of dynamic system (エ-field) is a little bit different on what we do on sets. By contrast, it defines (since two sets might have different unit basis) the relative position and orientation of two sets, and also how to extend from both エ-field and form a continuous エ-field for $\mathbb{S}$. So in the figure, the field of the bar is responsible for place $\mathbb{S}_2$ top-right relative to $\mathbb{S}_1$.

And by now we could find out that, in such cases when you're traveling out a Innenraum, your angle of exit determines your angle on entry, and also your destination. And here's another core reason why built dynamic system, is to provide you different ways to connect different set geometrically.

第 III 部

哲學與物理

第IV部

研究

第 15 章　高維到低維的連繫

15.1　多餘的圖層？

So as time goes on, this project gets really complicated and tangled. Originally, there's only 2 layers —— Physical and Visual. And the goal is simply find a mapping (or what we called, dynamic system, here) that fully maps every point from Physical layer ($\mathbb{A}$) to Visual layer ($\mathbb{V}$). But some issue arises, regarding the definition 4.4 無外力系統.

So the issue is that, consider a series of input coordinate that has same direction but different magnitude. Well by implying the definition, it would mean they would taken a same path (let's call it $\mathbb{F}$). Now in order to satisfied definition 4.3 雙向封閉性 the destination must be in $\mathbb{F} \cap \mathbb{V}$.

But for the majority cases, $\mathbb{F} \cap \mathbb{V}$ would be a set of points (not line segments), as for any two random lines (suppose we're discussing 2-D fractal), it's rare for those lines having overlapping sections (instead of some intersecting points). And by now, we could come to a conclusion that in this case, for most coordinate input, they won't land on the fractal if we simply have 2 layers.

And that's the reason we added extra 2 layer. But by doing this makes us thinking: "Did we over-complicated our system?" Which lead to a seperate brance of system as in Appendix C.1 行走方向分析法 and C.2 Extended DirDyn Analysis. In simple word, those system stay with the 2-layer system and meanwhile only consider unit vectors (instead of vectors with different magnitudes).

But meanwhile, the main research sticks with what we end up with —— 4-layer system. Making フ → ミ more like a simple conformal transformation, while the "Dimension Reducing" is preformed at コ → ム , and which raises the question "Is フ → ミ still meaningful?". And also a bigger problem, cause the reason we go for a dynamic system-like mapping instead of just deconstructing dimensions is because. . . well we've figured out it just wouldn' work, at least in an easy way (though

I don’t quite remember why we came to this conclusion).

第16章　行之分析：動態系統

16.1　方向偏轉唯一解證明

4.2.2 方向的偏轉

唯一解　的證明應該在連續分佈エ場上是可被保證的？

16.2　分析參數

設一系統，其中事先定義之部份有

1. 原點
2. エ場

並吃入使用者輸入之座標 $\vec{c}$，並映射至結果 $\vec{d}$。

那針對一動態系統，擁有的參數如下：

1. 起始條件
2. 幀與幀間的關係
3. 終止條件

其中又分別有位置、速度與加速度三個子項。

16.2.1　加速度

那首先來定義 $a(t)$，已知 $\hat{a}$ 滿足每個切片[34]相等（下述算式設 $\vec{x}$ 為原點）。那在加速度方向已定情況下，我們只需討論他大小的可能性有：

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{v}\| \tag{46a}$$ {eq:aPos:vMag}

[34]定義見 4.2.2 方向的偏轉

$$\|\vec{a}\| = l, \int_0^l \text{エ}(x)dx = \|\vec{v}\| \tag{46b}$$ {eq:aPos:eInt}

Something mixed of two option above. (46c) {eq:aPos:mixed}

{eqs:aPossible}

16.2.2 起始速度

接著起始速度的部分也有下列的方案可選擇：

$$v(0) = \vec{c} \tag{47a}$$ {eq:vPos:asIs}

$$v(0) = \|\vec{c}\| \tag{47b}$$ {eq:vPos:unit}

{eqs:vPossible}

16.2.3 中止條件

最後終止條件的方案：

$$\vec{d} = v(1) \tag{48a}$$ {eq:tPos:unitTime}

$$\text{Traveled physical distance} = \|\vec{v}\| \tag{48b}$$ {eq:tPos:length}

{eqs:terminPos}

16.3 參數選配

首先從建構系統開始，我們必須從算式 (46)、(47) 及 (48) 中每個各選一個後，證明他們是否能滿足下列條件：

> **問題 2** (證定義 4.4 無外力系統). 給定 $f : \vec{c} \mapsto \vec{d}$，以 $\vec{c}(t)$ 表示在系統中輸入 $\vec{c}$ 時會行經的路徑，是否滿足 $\vec{d} \in (r\vec{c})(t), r \geq 1, r \in \mathbb{R}$

附錄

引用

[1] "黏 土 幾 何：視 角 切 換"；https://www.mail-archive.com/dou-geometry@googlegroups.com/msg00004.html

[2] "Die Hypothese der Fütopi (archive 30.03.2020)", https://archive.org/details/dieHypothesederFutopi.archive30.03.2020, (Also the 22.03.2020 Archive Version)